الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية
امتحان تجريبي بكالوريا التعليم الثانوي
الشعبة : علوم تجريبية

ثانويات:الشيخ محمد المقراني و حي 970 سكن جامعة
وسلطاني عمر تندلة وقادري لمنور عين الشوشة
دورة : ماي 2022

اختبار في مادة : الرياضيات

المدة : 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين :

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$ ، ونعرف التكامل التالي $I = \int_0^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x$

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) > 0$ ، ثم استنتج اشارة I .

2) عين العددين الحقيقيين a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي x يكون $\dfrac{e^x}{1+e^x} = a + \dfrac{b}{1+e^x}$.

3) احسب قيمة $A = \int_0^{\ln 2} \dfrac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x$ ، ثم استنتج قيمة $B = \int_0^{\ln 2} f'(x)\mathrm{d}x$

4) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) + f'(x) = \dfrac{1}{e^x+1}$ ، ثم استنتج قيمة التكامل I .

التمرين الثاني : (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = \alpha$
و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$

1) عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة .

2) نفرض أن $\alpha = \frac{3}{2}$

أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < 2$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة و استنتج أنها متقاربة ، ثم جد نهايتها .

3) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n ، بـ: $v_n = \ln(u_n - 1)$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n وأحسب نهايتها .

جـ) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = \frac{v_0}{2^0} + \frac{v_1}{2^1} + \frac{v_2}{2^2} + \cdots + \frac{v_n}{2^n}$ بين أن $S_n = (-n-1)\ln 2$

د) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S'_n = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2$ احسب S'_n بدلالة n

التمرين الثالث : (05 نقاط)

لدينا 3 أكياس متماثلة، الكيس الأول U_1 يحوي كرية بيضاء و كرية سوداء ، الكيس الثاني U_2 يحوي كريتين بيضاوين و كرية سوداء أما الكيس الثالث U_3 فيحوي ثلاثة كريات بيضاء وكرية سوداء
(كل الكريات متماثلة ولا نميز بينها باللمس).
نختار كيساً عشوائياً ونسحب منه كرية .

1) انجز شجرة الاحتمالات المرفقة لمعطيات النص مبرزاً عليها احتمالات الحوادث .

2) احسب احتمال الحادثة A : "الحصول على كرية بيضاء"

3) إذا كانت الكرية المسحوبة بيضاء ، ما احتمال أن تكون من الكيس U_2

4) نضع جميع كريات الأكياس السابقة في صندوق واحد . و نقترح اللعبة التالية : للمشاركة يدفع اللاعب α د.ج (α عدد طبيعي معطى) . و يسحب كريتين من الصندوق في آن واحد فإذا سحب كريتين بيضاوين يخسر ما دفعه وإذا سحب كريتين من لونين مختلفين يعاد له ما دفعه وإذا سحب كريتين سوداوين يتحصل على 100 د.ج .
وليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل الربح الجبري للاعب بدلالة α .

أ) برر أن مجموعة قيم X هي $X \in \{-\alpha, 0, 100-\alpha\}$.

ب) عرّف قانون المتغير العشوائي X ، ثم عين أصغر قيمة لـ α حتى تكون اللعبة ليست في صالح اللاعب.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$

1) احسب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3) احسب $g(0)$ ، ثم استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ الوحدة $1cm$

1) أحسب $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$.

2) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 3$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث $-3.01 < \alpha < -3$ و $0.7 < \beta < 0.8$.

5) انشئ (Δ) ثم (C_f) على المجال $]-\infty\ ,\ 1]$.

6) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto xe^{2x}$ و التي تنعدم عند 0 .

ب) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 0$ و $x = 1$.

III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ كما يلي : $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

1) جد عبارة h' الدالة المشتقة للدالة h بدلالة f' .

2) استنتج اتجاه تغير الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها .

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة ، عينه مع التبرير .

1) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $3y' - 2y + 6 = 0$ والذي يحقق الشرط $f(0) = 4$ هو :

أ) $f(x) = 3e^{\frac{2}{3}x} + 1$ ب) $f(x) = e^{\frac{2}{3}x} + 3$ جـ) $f(x) = 2e^{\frac{2}{3}x} + 2$

2) القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[2\ ,\ 3]$ بـ : $f(x) = 3^{x-1}$ هي :

أ) $m = \frac{6}{\ln 3}$ ب) $m = -3$ جـ) $m = \ln 3$

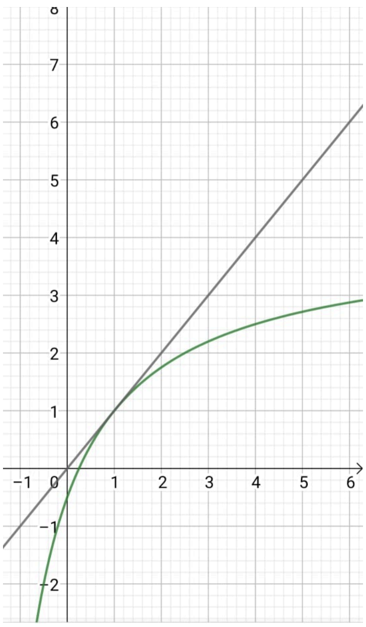
3) الدالة الأصلية F التي تحقق $F(1) = 0$ للدالة f المعرفة على $]0\ ,\ +\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ هي :

أ) $F(x) = x - 1 + \ln x$ ب) $F(x) = 1 - x + \ln x$ جـ) $F(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

4) نعتبر العدد الحقيقي $A(y) = \int_1^y x \ln x dx$ حيث $y > 1$ علما أن الدالة $x \mapsto \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto x \ln x$ ، فإن قيمة y التي من أجلها $A(y) = \dfrac{1}{4}$ هي :

أ) $y = e^{-1}$ ب) $y = \sqrt{e}$ جـ) $y = 2e$

التمرين الثاني : (05 نقاط)



في الشكل المقابل (C) التمثيل البياني للدالة $f : x \mapsto \dfrac{4x-1}{x+2}$ و المتزايدة تماماً على المجال $]-2\ ,\ +\infty[$ و (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

1) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 5$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$

أ) أعد رسم الشكل ثم مثل الحدود الأربعة الأولى على حامل محور الفواصل مبرزاً خطوط الإنشاء وذلك دون حسابها.

ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

2) أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$.

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

3) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n ، بـ: $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ ، ثم احسب حدها الأول.

ب) اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

جـ) احسب نهاية المتتالية (u_n).

التمرين الثالث : (04 نقاط)

صندوق يحتوي على أربع كريات بيضاء و ثلاث كريات سوداء و كريتين حمراوين و كرية خضراء ، كل الكريات متماثلة وغير متمايزة عند اللمس نسحب من الصندوق أربع كريات في آن واحد .

1) احسب احتمال كل من الحوادث التالية :
A : "الحصول على الأقل على كرية بيضاء"
B : "الحصول بالضبط على ثلاث كريات من نفس اللون"

2) احسب $P(B \cap A)$ ثم ستنتج $P_A(B)$

3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب أربع كريات عدد الألوان التي تحملها الكريات

أ) برر أن مجموعة قيم X هي $X \in \{1, 2, 3, 4\}$.

ب) بين أن $P(X=2) = \frac{29}{105}$ ، ثم عين قانون المتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

جـ) احسب $P(X^2 - 5X + 6 = 0)$

د) عين قيمة العدد الحقيقي a حتى يكون $E(1954X + a) = 2022$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0\ ,\ +\infty[$ كما يلي : $g(x) = 1 + x\ln x$

1) أ) احسب نهايتي الدالة g عند 0 و $+\infty$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g ،ثم شكل جدول تغيراتها.

جـ) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0\ ,\ +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

2) حدد اشارة $(x-1)\ln x$ على المجال $]0\ ,\ +\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0\ ,\ +\infty[$ كما يلي : $f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x} + (\ln x)^2$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ الوحدة $2cm$

1) أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ وفسر النتيجة هندسياً.

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0\ ,\ +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x) + (x-1)\ln x}{x^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3) بين أنه يوجد عدد حقيقي α من المجال $]0.4\ , 0.5[$ يحقق $f(\alpha) = 0$.

4) اكتب معادلة للمستقيم (T) مماس المنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

5) انشئ في المعلم السابق (T) ثم (C_f) على المجال $]0\ , 2[$.

III) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]0\ , +\infty[$ كما يلي: $h(x) = (\ln x)^2$

1) بين أن الدالة $H : x \mapsto xh(x) - x^2h'(x) + 2x$ هي دالة أصلية للدالة h على المجال $]0\ , +\infty[$.

2) بين أن مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) وحامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x = \alpha$ و $x = 1$ هي: $A(\alpha) = 12 - 4\alpha - 2(\ln\alpha)^2 - 4H(\alpha)\ cm^2$

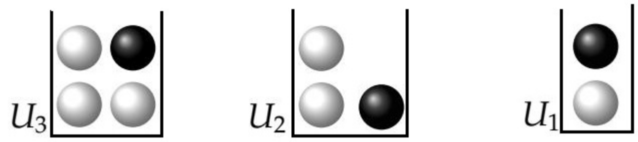
الإجابة النموذجية لموضوع اختبار مادة الرياضيات/شعبة علوم تجريبية/باك تجريبي 2022

عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	العلامة مـجزأة	العلامة المجموع
التمرين الأول 1) بيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) > 0$ لدينا $e^x + 1 > 1$ ومنه $\ln(e^x+1) > 0$ وبما أن $e^{-x} > 0$ فإن $e^{-x}\ln(e^x+1) > 0$ أي $f(x) > 0$	0.5	
استنتاج اشارة I: بما أن $f(x) > 0$ فإن $\int_0^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x > 0$ ومنه $I > 0$	0.5	1
2) تعيين العددين a و b بحيث يكون من أجل $x \in \mathbb{R}$ ، $\frac{e^x}{e^x+1} = a + \frac{b}{e^x+1}$ لدينا $a + \frac{b}{e^x+1} = \frac{ae^x + a + b}{e^x+1}$	0.5	
بالمطابقة نجد $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$	0.5	1
3) حساب قيمة التكامل A: $A = \int_0^{\ln 2} 1 - \frac{e^x}{e^x+1}\mathrm{d}x = [x - \ln(e^x+1)]_0^{\ln 2} = \ln 2 - \ln 3 + \ln 2 = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$	0.5	
استنتاج قيمة التكامل B: $B = \int_0^{\ln 2} f'(x)\mathrm{d}x = [f(x)]_0^{\ln 2} = f(\ln 2) - f(0) = \frac{1}{2}\ln 3 - \ln 2 = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	0.5	1
4) بيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x $f(x) + f'(x) = \frac{1}{e^x+1}$: $f(x) + f'(x) = e^{-x}\ln(e^x+1) - e^{-x}\ln(e^x+1) + \frac{e^x}{e^x+1} \times e^{-x} = \frac{1}{e^x+1}$	0.5	
استنتاج قيمة التكامل I: لدينا مما سبق $f(x) = \frac{1}{e^x+1} - f'(x)$ ومنه $I = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x+1}\mathrm{d}x - \int_0^{\ln 2} f'(x)\mathrm{d}x = A - B = \ln\frac{4}{3} - \ln\frac{\sqrt{3}}{4} = \ln\left(\frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$	0.5	1
التمرين الثاني 1) تعيين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة: (u_n) متتالية ثابتة معناه $u_{n+1} = u_n$ أي $\alpha = (\alpha-1)^2 + 1$ إذن $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$ ومنه $\alpha = 1$ أو $\alpha = 2$	0.5	0.5

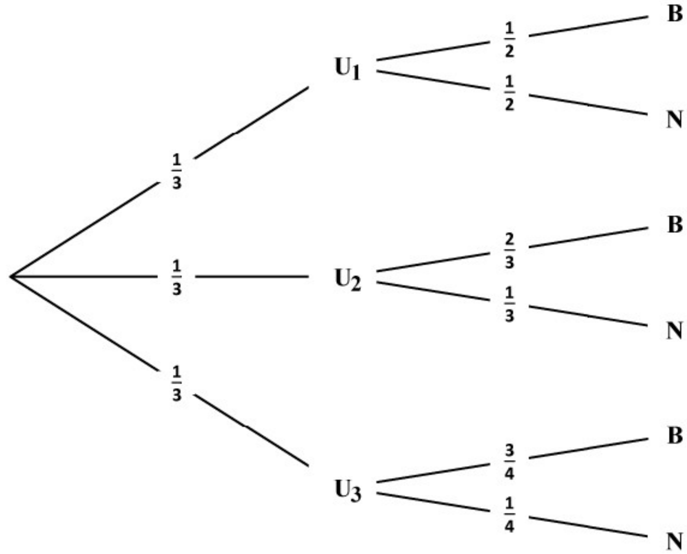
	0.25 0.25	2) نضع $\alpha = \frac{3}{2}$ أ) البرهان أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $1 < u_n < 2$. "نستعمل الاستدلال بالتراجع" * لدينا $u_0 = \frac{3}{2}$ و $1 < \frac{3}{2} < 2$ أي $1 < u_0 < 2$ * نفرض أن $1 < u_n < 2$ ، لدينا: $1 < u_n < 2$ بإضافة -1 نجد $0 < u_n - 1 < 1$ وبالتربيع نجد $0 < (u_n-1)^2 < 1$ بإضافة 1 نجد $1 < (u_n-1)^2+1 < 2$ أي $1 < u_{n+1} < 2$ ومنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $1 < u_n < 2$
	0.5	ب) بيان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما: لدينا $u_{n+1} - u_n = (u_n-1)(u_n-2) < 0$ (لأن: $1 < u_n < 2$) ومنه (u_n) متناقصة تماماً
	0.25	استنتاج أنها متقاربة : بما أن (u_n) متناقصة تماماً و محدودة من الأسفل فهي متقاربة
1.5	0.25	إيجاد نهايتها: بما أنها متقاربه فإن نهايتها l تحقق $l = (l-1)^2+1$ أي $l^2 - 3l + 2 = 0$ ومنه $l = 2$ أو $l = 1$ وبما أن (u_n) متناقصة و $u_0 = \frac{3}{2}$ فإن: $l = 1$
	0.5	3) $v_n = \ln(u_n - 1)$ أ) اثبات أن (v_n) متتالية هندسية: $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}-1) = \ln\left((u_n-1)^2+1-1\right) = 2\ln(u_n-1) = 2v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$
	0.25	حساب الحد الأول $v_0 = \ln(u_0-1) = \ln(\frac{3}{2}-1) = \ln(\frac{1}{2}) = -\ln 2$
	0.25	ب) كتابة v_n بدلالة n $v_n = v_0 \times q^n = -2^n \times \ln 2$
	0.25	استنتاج u_n بدلالة n : لدينا $v_n = \ln(u_n-1)$ ومنه $e^{v_n} = u_n - 1$ أي $u_n = e^{v_n}+1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}+1$
	0.25	حساب نهاية المتتالية (u_n) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}+1 = 1$
	0.25	جـ) بيان أن $S_n = (-n-1)\ln 2$: لدينا $v_n = -2^n \times \ln 2$ ومنه $\frac{v_n}{2^n} = -\ln 2$ إذن $S_n = -(\underbrace{\ln 2 + \ln 2 + \ln 2 + \cdots + \ln 2}_{\text{n+1 حداً}}) = (-n-1)\ln 2$
2	0.25	د) كتابة S'_n بدلالة n: $S'_n = v_0^2 \times q^0 + v_0^2 \times q^2 + v_0^2 \times q^4 + \cdots + v_0^2 \times q^{2n}$ ومنه $S'_n = v_0^2(1+q^2+q^4+\cdots+q^{2n}) = v_0^2\left(\frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1}\right)$ $S'_n = (\ln 2)^2\left(\frac{2^{2n+2}-1}{3}\right)$

<table>
<tr><td>

التمرين الثالث



1) شجرة الاحتمالات:



</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>

2) حساب احتمال A: بتطبيق دستور الاحتمالات الكلية نجد

$P(A) = P(U_1 \cap B) + P(U_2 \cap B) + P(U_3 \cap B) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right) = \frac{23}{36}$

</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>

3) إذا كانت الكرية المسحوبة بيضاء فإن احتمال أن تكون من الكيس U_2 هو:

$P_B(U_2) = \dfrac{P(U_2 \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{23}{36}} = \dfrac{8}{23}$

</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>

4) أ) تبرير أن $x \in \{-\alpha, 0, 100-\alpha\}$: لدينا أربع ألوان و نسحب أربع كريات

</td><td>0.5</td><td rowspan="3">2</td></tr>
<tr><td>

ب) قانون احتمال X:

<table>
<tr><td>x_i</td><td>$-\alpha$</td><td>0</td><td>$100-\alpha$</td></tr>
<tr><td>$P(X=x_i)$</td><td>$\frac{C_6^2}{C_9^2} = \frac{15}{36}$</td><td>$\frac{C_6^1 \times C_3^1}{C_9^2} = \frac{18}{36}$</td><td>$\frac{C_3^2}{C_9^2} = \frac{3}{36}$</td></tr>
</table>

</td><td>1</td></tr>
<tr><td>

تعيين أصغر قيمة لـ α حتى تكون اللعبة ليست في صالح اللاعب:

$E(X) < 0$ يعني $\dfrac{-15\alpha + 300 - 3\alpha}{36} < 0$ ومنه $-18\alpha < -300$

أي $\alpha > \frac{300}{18} \approx 16.66$ ، إذن أصغر قيمة هي: $\alpha = 17$

</td><td>0.5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>0.5</td><td>0.25
0.25</td><td>

التمرين الرابع

I) $g(x)=1-e^{2x}-2xe^{2x}$

1)النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 1-e^{2x}-2xe^{2x}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1-e^{2x}-2xe^{2x}=-\infty$
</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0.25
0.25
0.25
0.25</td><td>

2) مشتقة الدالة g ، $g'(x)=-2e^{2x}-2e^{2x}-4xe^{2x}=-4e^{2x}(1+x)$

اشارة $g'(x)$ من اشارة $-x-1$

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$-x-1$</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td></td></tr>
</table>

ومنه g متزايدة تماما على المجال $]-\infty,-1]$ ومتناقصة تماما على المجال $[-1,+\infty[$

جدول التغيرات:

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$g'(x)$</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$g(x)$</td><td>1</td><td>$\nearrow$</td><td>$1+e^{-2}$</td><td>$\searrow$</td><td>0</td><td>$\searrow$</td><td>$-\infty$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>0.5</td><td>0.25
0.25</td><td>

3) حساب $g(0)$ $g(0)=1-e^{0}-2\times 0e^{0}=0$

اشارة $g(x)$

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$g(x)$</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>0.5</td><td>0.25
0.25</td><td>

II) $f(x)=x+3-xe^{2x}$

1)النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x+3-xe^{2x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{3}{x}-e^{2x}\right)=-\infty$
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">0.75</td><td>0.25</td><td>

2) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+3)=\lim\limits_{x\to-\infty} -xe^{2x}=0$

ومنه المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x+3$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$
</td></tr>
<tr><td>0.5</td><td>

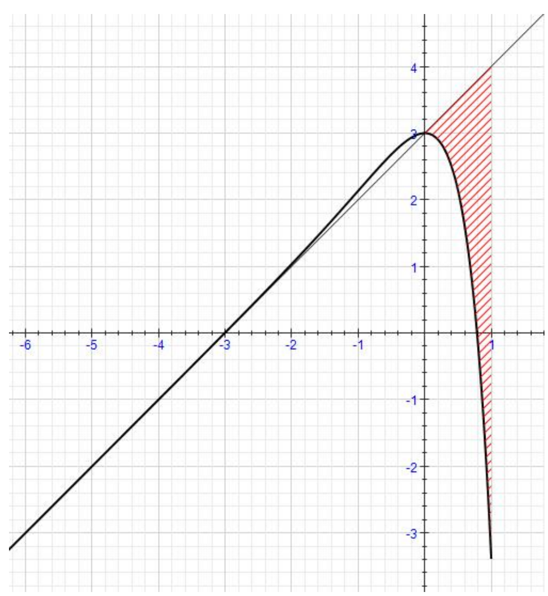
ب) وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)-(x+3)$</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td></td></tr>
<tr><td>الوضعية النسبيةلـ (C_f) و (Δ)</td><td colspan="2">(C_f) فوق (Δ)</td><td>$(\Delta)\cap(C_f)$</td><td colspan="2">(C_f) تحت (Δ)</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>0.25</td><td>3) أ) إثبات أن $f'(x)=g(x)$ $f'(x)=1-2e^{2x}-2xe^{2x}=g(x)$</td></tr>
<tr><td>0.75</td><td>0.25

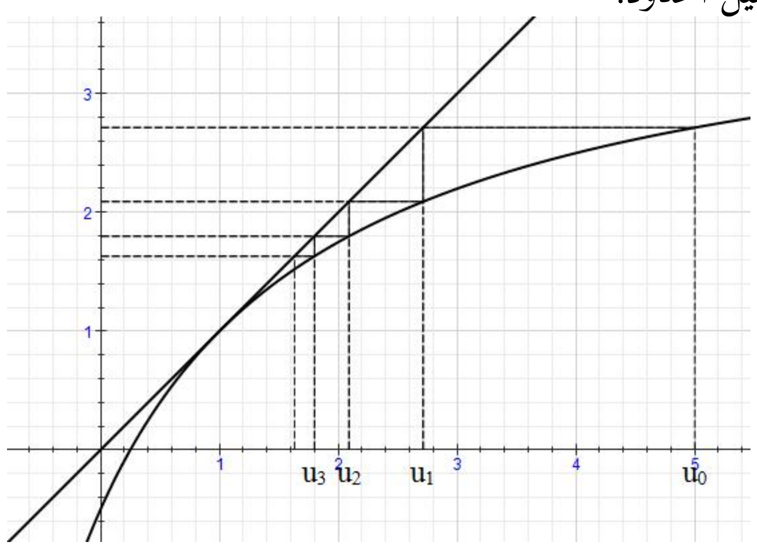
0.25</td><td>ب) مما سبق : f متزايدة تماما على المجال $]-\infty,0]$ ومتناقصة تماما على المجال $[0,+\infty[$
جدول التغيرات:
$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline f(x) & & & 3 & & \\ & -\infty & \nearrow & & \searrow & -\infty \end{array}$$</td></tr>
<tr><td>0.75</td><td>0.25

0.25

0.25</td><td>4) المعادلة $f(x)=0$:
الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجالين $]-3.01,-3[$ و $]0.7,0.8[$
$\begin{cases} f(-3.01)\approx -0.003 \\ f(-3)\approx 0.007 \end{cases}$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$
تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]-3.01,-3[$
$\begin{cases} f(0.7)\approx 0.861 \\ f(0.8)\approx -0.162 \end{cases}$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$
تقبل حلاً وحيداً β في المجال $]0.7,0.8[$</td></tr>
<tr><td>0.75</td><td>0.25
0.5</td><td>5) التمثيل البياني:

إنشاء (Δ)
إنشاء (C_f)</td></tr>
</table>

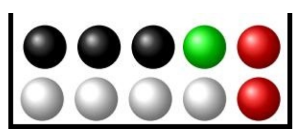
<table>
<tr>
<td rowspan="2">0.75</td>
<td>0.5</td>
<td>6) أ) الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto xe^{2x}$ التي تنعدم عند 0
$$\begin{aligned} x \mapsto \int_0^x te^{2t}\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{2}te^{2t}\right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{2}e^{2t}\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{2}te^{2t}\right]_0^x - \left[\frac{1}{4}e^{2t}\right]_0^x \\ &= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}\left(e^{2x}-1\right) \end{aligned}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>0.25</td>
<td>ب) المساحة:
$$\begin{aligned} A &= \left(\int_0^1 ((x+3) - f(x)\mathrm{d}x)\right) cm^2 \\ &= \left(\int_0^1 xe^{2x}\mathrm{d}x\right) cm^2 \\ &= \frac{e^2+1}{4} \quad cm^2 \end{aligned}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>0.25</td>
<td>0.25</td>
<td>$h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ (III
1) عبارة $h'(x)$:
$$\begin{aligned} h'(x) &= -\frac{1}{x^2} \times g\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{xe^{\frac{2}{x}} + 2e^{\frac{2}{x}} - x}{x^3} \end{aligned}$$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">0.5</td>
<td>0.25</td>
<td>2) استنتاج اتجاه تغير الدالة h:
الدالة h مركبة من الدالة مقلوب المتناقصة تماما على المجال $]-\infty,0[$ و المجال $]0,+\infty[$
متبوعة بالدالة f المتزايدة تماما على المجال $]-\infty,0[$ والمتناقصة تماما على المجال $]0,+\infty[$
حسب مبرهنة اتجاه تغير دالة مركبة فإن الدالة h متناقصة تماما على المجال $]-\infty,0[$
ومتزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$</td>
</tr>
<tr>
<td>0.25</td>
<td>جدول التغيرات:
$$\begin{array}{|c|ccc|}\hline x & -\infty & 0 & +\infty \\ \hline f'(x) & - & \| & + \\ \hline f(x) & 3 \searrow -\infty & \| & -\infty \nearrow 3 \\ \hline \end{array}$$</td>
</tr>
</table>

الإجابة النموذجية لموضوع اختبار مادة الرياضيات/شعبة علوم تجريبية/باك تجريبي 2022

<table>
<tr><th rowspan="2">عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)</th><th colspan="2">العلامة</th></tr>
<tr><th>مـجزأة</th><th>المجموع</th></tr>
<tr><td>التمرين الأول
1) الحل الخاص هو: ب) $f(x)=e^{\frac{2}{3}x}+3$
$3y'-2y+6=0$ تكافئ $y'=\frac{2}{3}y-2$ ومنه $f: x\mapsto ce^{\frac{2}{3}x}+3$ وبما أن $f(0)=4$ فإن $c+3=4$ ومنه $c=1$</td><td>0.5
0.5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2) القيمة المتوسطة هي: أ) $m=\frac{6}{\ln 3}$
$m=\frac{1}{3-2}\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_2^3 e^{(x-1)\ln 3}\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{\ln 3}3^{x-1}\right]_2^3=\frac{9-3}{\ln 3}=\frac{6}{\ln 3}$</td><td>0.5
0.5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3) الدالة الأصلية هي : أ) $F(x)=x-1+\ln x$
$F(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t=\int_1^x 1+\frac{1}{t}\mathrm{d}t=[t+\ln t]_1^x=x+\ln x-1$</td><td>0.5
0.5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4) قيمة y هي : ب) $y=\sqrt{e}$
$A(y)=\left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)\right]_1^y=\frac{y^2}{2}\left(\ln y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}$ ومنه $A(y)=\frac{1}{4}$
يعني أن $\ln y=\frac{1}{2}$ أي $y=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$</td><td>0.5
0.5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>التمرين الثاني
1) أ) تمثيل الحدود:

</td><td>0.5</td><td></td></tr>
<tr><td>ب) التخمين : المتتالية (u_n) متناقصة تماماً و متقاربة</td><td>0.5</td><td>1</td></tr>
</table>

	0.25	2) أ) البرهان أن $u_n > 1$ "نستعمل الاستدلال بالتراجع" * لدينا $u_0 = 5$ أي $u_0 > 1$
	0.5	* نفرض أن $u_n > 1$ بما أن متزايدة تماماً على المجال $]-2,+\infty[$ فإن $f(u_n) > f(1)$ ومنه $u_{n+1} > 1$ أي من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 1$
	0.5	ب) اتجاه تغير المتتالية (u_n) لدينا $u_{n+1} - u_n = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} - u_n = \dfrac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{u_n + 2} = -\dfrac{(u_n - 1)^2}{u_n + 2} < 0$ ومنه (u_n) متناقصة تماماً
1.5	0.25	استنتاج أنها متقاربة : بما أن (u_n) متناقصة تماماً و محدودة من الأسفل فهي متقاربة
	0.75	3) $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$ أ) اثبات أن (v_n) متتالية حسابية $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1} - 1} = \dfrac{u_n + 2}{3u_n - 3} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{u_n - 1} = \dfrac{1}{3} + v_n$ ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = \dfrac{1}{3}$
	0.25	حساب الحد الأول $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 1} = \dfrac{1}{5 - 1} = \dfrac{1}{4}$
	0.5	ب) كتابة v_n بدلالة n $\quad v_n = v_0 + nr = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3}n$
	0.5	كتابة u_n بدلالة n $\quad u_n = \dfrac{1}{v_n} + 1 = \dfrac{12}{3 + 4n} + 1 = \dfrac{4n + 15}{4n + 3}$
2.5	0.5	ج) حساب نهاية المتتالية (u_n) $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4n + 15}{4n + 3} = 1$

التمرين الثالث



	0.25	1) * عدد الحالات الممكنة لسحب أربع كريات هو: $C_{10}^4 = 210$
	0.5	* حساب احتمال A: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{C_6^4}{210} = 1 - \frac{15}{210} = \frac{195}{210} = \frac{13}{14}$
1.25	0.5	* حساب احتمال B: $P(B) = \frac{C_4^3 \times C_6^1 + C_3^3 \times C_7^1}{210} = \frac{4 \times 6 + 7}{210} = \frac{31}{210}$
	0.5	2) * حساب احتمال $B \cap A$: $P(B \cap A) = \frac{C_4^1 \times C_3^3 + C_4^3 \times C_6^1}{210} = \frac{4 \times 1 + 4 \times 6}{210} = \frac{28}{210} = \frac{2}{15}$
0.75	0.25	* استنتاج $P_A(B)$: $P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{13}{14}} = \frac{28}{195}$

<table>
<tr><td></td><td>0.25</td><td>3) أ) تبرير أن $x\in\{1,2,3,4\}$: لدينا أربع ألوان و نسحب أربع كريات</td></tr>
<tr><td></td><td>0.25</td><td>ب) اثبات أن $P(X=2)=\frac{29}{105}$
$P(X=2)=\frac{C_1^1\times(C_4^3+C_3^3)+C_2^1\times(C_4^3+C_3^3)+C_2^2\times(C_4^2+C_3^2)+C_3^1\times C_4^3+C_3^2\times C_4^2+C_3^3\times C_4^1}{210}$
$P(X=2)=\frac{(4+1)+2(4+1)+(6+3)+3\times4+3\times6+4}{210}=\frac{58}{210}=\frac{29}{105}$</td></tr>
<tr><td></td><td>0.25
0.25
0.25</td><td>قانون احتمال X
$P(X=1)=\frac{C_4^4}{210}=\frac{1}{210}$
$P(X=4)=\frac{C_4^1\times C_3^1\times C_2^1\times C_1^1}{210}=\frac{24}{210}=\frac{4}{35}$
$P(X=3)=1-(P(X=1)+P(X=2)+P(X=4))=1-\frac{83}{210}=\frac{127}{210}$
<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>$P(X=x_i)$</td><td>$\frac{1}{210}$</td><td>$\frac{29}{105}$</td><td>$\frac{127}{210}$</td><td>$\frac{4}{35}$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td></td><td>0.25</td><td>حساب الأمل الرياضياتي: $E(X)=\frac{1}{210}+\frac{2\times29}{105}+\frac{3\times127}{210}+\frac{4\times4}{35}=\frac{594}{210}=\frac{99}{35}$</td></tr>
<tr><td></td><td>0.25</td><td>جـ) حساب $P(X^2-5X+6=0)$:
$P(X^2-5X+6=0)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{29}{105}+\frac{127}{210}=\frac{185}{210}=\frac{37}{42}$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0.25</td><td>د) تعيين قيمة a: لدينا $E(1954X+a)=2022$ يعني $1954E(X)+a=2022$
ومنه $a=2022-1954\times\frac{594}{210}=-\frac{736056}{210}=-\frac{122676}{35}$</td></tr>
<tr><td></td><td>0.25
0.25</td><td>التمرين الرابع
I) $g(x)=1+x\ln x$
1) أ) النهايات: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}1+x\ln x=1$
$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}1+x\ln x=+\infty$</td></tr>
<tr><td></td><td>0.25</td><td>ب) مشتقة الدالة g : $g'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}=1+\ln x$</td></tr>
<tr><td></td><td>0.25</td><td>اشارة $g'(x)$: $g'(x)=0$ يعني $1+\ln x=0$ ومنه $x=e^{-1}$
<table><tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>e^{-1}</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$g'(x)$</td><td>||</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr></table>ومنه g متناقصة تماما على المجال $]0,e^{-1}]$ ومتزايدة تماما على المجال $[e^{-1},+\infty[$</td></tr>
<tr><td></td><td>0.5</td><td>جدول التغيرات:
<table><tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>e^{-1}</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$g'(x)$</td><td>||</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td>|| 1</td><td>$\searrow$</td><td>$1-e^{-1}$</td><td>$\nearrow$</td><td>$+\infty$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>1.75</td><td>0.25</td><td>جـ) استنتاج اشارة $g(x)$: من جدول التغيرات نستنتج أنه أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0,+\infty[$ ، $g(x)\geqslant e^{-1}>0$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th></th><th></th></tr>
<tr><td>
2) اشارة $(x-1)\ln x$

<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$x-1$</td><td>‖</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\ln x$</td><td>‖</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>$(x-1)\ln x$</td><td>‖</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
</table>

ومنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0,+\infty[$: $(x-1)\ln x \geqslant 0$
</td><td>0.5</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>
II) $f(x)=1+\frac{\ln x}{x}+(\ln x)^2$

1) أ) النهايات: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{\ln x}{x}+(\ln x)^2=+\infty$

$\lim\limits_{\substack{> \\ x\longrightarrow 0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{> \\ x\longrightarrow 0}} 1+\ln x\left(\frac{1+x\ln x}{x}\right)=-\infty$

التفسير الهندسي: بمأن $\lim\limits_{\substack{> \\ x\longrightarrow 0}} f(x)=-\infty$ فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي هو حامل محور التراتيب
</td><td>0.25
0.25
0.25</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td>
2) أ) $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}+2\frac{1}{x}\ln x=\frac{1-\ln x+2x\ln x}{x^2}$

ومنه $f'(x)=\frac{1+x\ln x+(x-1)\ln x}{x^2}=\frac{g(x)+(x-1)\ln x}{x^2}$
</td><td>0.5</td><td rowspan="3">1.5</td></tr>
<tr><td>
ب) مما سبق لدينا $g(x)>0$ و $(x-1)\ln x\geqslant 0$ أي $g(x)+(x-1)\ln x>0$

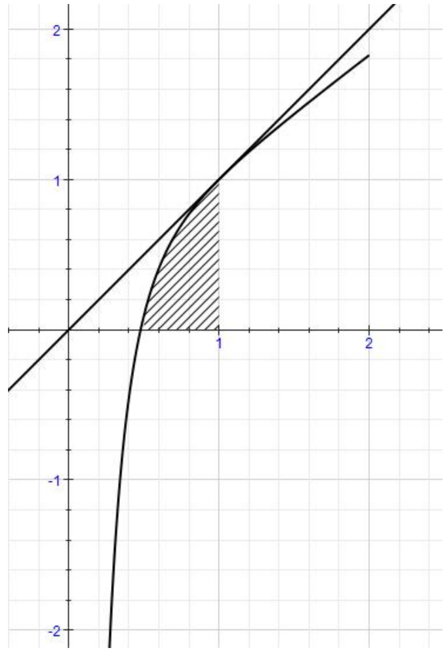
ومنه $f'(x)>0$ إذن f متزايدة تماماً على المجال $]0,+\infty[$
</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>
جدول التغيرات:

<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>‖</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>‖</td><td>$-\infty \nearrow +\infty$</td></tr>
</table>
</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>
3) المعادلة $f(x)=0$:

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0.4,0.5]$

$\begin{cases} f(0.4)\approx -0.451 \\ f(0.5)\approx 0.094 \end{cases}$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]0.4,0.5[$
</td><td>0.25
0.25</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>
4) معادلة المماس: $(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$

ومنه $(T): y=1\times(x-1)+1$ أي $(T): y=x$
</td><td>0.5</td><td>0.5</td></tr>
</table>

  0.5	0.25 0.25	5) التمثيل البياني  إنشاء (Δ) إنشاء (C_f)
0.5	0.5	III) 1) بيان أن $H : x \mapsto xh(x) - x^2h'(x) + 2x$ هي دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto (\ln x)^2$ على المجال $]0,\infty[$: لدينا $h'(x) = \frac{2}{x}\ln x$ و $h''(x) = \frac{-2}{x^2}\ln x + \frac{2}{x^2} = \frac{2}{x^2}(1-\ln x)$ ومنه $\begin{aligned} H'(x) &= h(x) + xh'(x) - 2xh'(x) - x^2h''(x) + 2 \\ &= h(x) - xh'(x) - x^2h''(x) + 2 \\ &= (\ln x)^2 - 2\ln x - 2 + 2\ln x + 2 \\ &= (\ln x)^2 \end{aligned}$
0.5	0.5	2) المساحة $\begin{aligned} A(\alpha) &= \left(\int_{\alpha}^{1} f(x)\mathrm{d}x\right) \times 4cm^2 \\ &= \left(\int_{\alpha}^{1} 1 + \frac{\ln x}{x} + (\ln x)^2\mathrm{d}x\right) 4cm^2 \\ &= \left[x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 + H(x)\right]_{\alpha}^{1} \times 4cm^2 \\ &= \left(3 - \alpha - \frac{1}{2}(\ln \alpha)^2 + H(\alpha)\right) \times 4cm^2 \\ &= \left(12 - 4\alpha - 2(\ln \alpha)^2 - 4H(\alpha)\right) cm^2 \end{aligned}$